

سلامت و سلامت

سایت تخصصی برق

www.power2.ir

reza@power2.ir

فصل سوم

حل مسائل الکترواستاتیک Solution of Electrostatic problems

تاکنون سه روش محاسبه شدت میدان الکترواستاتیکی (حل مسئله میزان الکتریکی ساکن) در فصل قبل ارائه و بررسی گردید. در این فصل روش‌ها و تکنیک‌های دیگری ارائه می‌شود.

معادلات لاپلاس و پواسون

$$\nabla_0 \vec{E} = \rho / \epsilon$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\nabla_0(-\nabla V) = \rho / \epsilon$$

$$\nabla_0(\nabla V) = -\rho / \epsilon$$

$$\nabla^2 V = -\rho / \epsilon$$

معادله پواسون Poisson Equation

(معادله دیفرانسیل درجه ۲ ولتاژ ناهمگن)

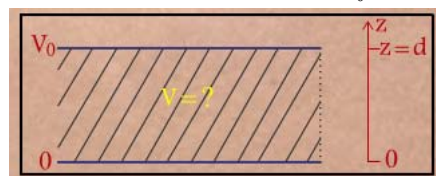
چنانچه در محیط مورد نظر که V مجهول می‌باشد و در صدد محاسبه آن هستیم $\rho = 0$ باشد.

$$\nabla^2 V = 0$$

معادله لاپلاس Laplace Equation

(معادله دیفرانسیل درجه ۲ ولتاژ همگن)

مثال: مطلوبست محاسبه تابع پتانسیل بین صفحات یک خازن بنحوی که پتانسیل صفحه پایین صفر و صفحه بالا در پتانسیل V_0 قرار دارد. از فوران میدان در لبه خازن صرف‌نظر می‌شود.



$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dz} = c_1 \Rightarrow dV = c_1 dz \Rightarrow V = c_1 z + c_2$$

$$z = 0 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow V(z = 0) = c_1(0) + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$z = d \Rightarrow V = V_0 \Rightarrow V(z = d) = c_1(d) + c_1 = V_0 \Rightarrow c_1 = \frac{V_0}{d}$$

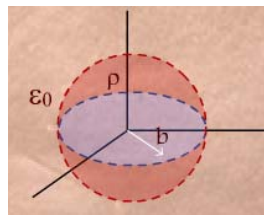
$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{d} z$$

بنابراین:

مثال: چنانچه بار حجمی پیوسته‌ای به چگالی $\rho_0 \frac{R}{b}$ تا فاصله b از مبدأ مختصات در فضای

آزاد $\epsilon = \epsilon_0$ مستقر باشد، مطلوب است محاسبه تابع پتانسیل و شدت میدان در کلیه نقاط

فضا با استفاده از معادلات لاپلاس یا پواسون



$$\begin{aligned}
 R < b : \quad \rho &= 0 \\
 \nabla^2 V_1 &= 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial V_1}{\partial \theta} = 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \frac{dV_1}{dR}) &= 0 \\
 \frac{d}{dR} (R^2 \frac{dV_1}{dR}) &= 0 \\
 R^2 \frac{dV_1}{dR} &= c_1 \\
 \frac{dV_1}{dR} &= \frac{c_1}{R^2} \rightarrow \vec{E} = -\nabla V \Rightarrow E_1 = -\frac{dV_1}{dR} = -\frac{c_1}{R^2} \\
 dV_1 &= \frac{c_1}{R^2} dR \\
 V_1 &= -\frac{c_1}{R} + c_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 \leq R \leq b : \quad \rho &= \rho_0 \frac{R}{b} \\
 \nabla^2 V_2 &= -\frac{\rho}{\epsilon} \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\
 \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \frac{dV_2}{dR}) &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\rho_0 \frac{R}{\epsilon_0 b} \\
 d(R^2 \frac{dV_2}{dR}) &= -\rho_0 \frac{R^3}{\epsilon_0 b} dR \\
 R^2 \frac{dV_2}{dR} &= -\frac{\rho_0 R^4}{4\epsilon_0 b} + c'_1 \rightarrow E_2 = -\frac{dV_2}{dR} = \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0 b} - \frac{c'_1}{R^2} \\
 dV_2 &= -\frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0 b} dR + \frac{c'_1}{R^2} dR \\
 V_2 &= -\frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 b} - \frac{c'_1}{R} + c'_2
 \end{aligned}$$

c'_2, c'_1, c_2, c_1 مجهول هستند.

با اعمال شرایط اولیه یا به عبارتی شرایط مرزی چهار مجهول فوق به دست خواهد آمد.

$$R = 0 \Rightarrow V \neq \infty \Rightarrow V_2 = -0 - \frac{c'_1}{0} + c'_2 \Rightarrow c'_1 = 0$$

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow V \neq \infty \Rightarrow V_1 = -\frac{c_1}{R} \Big|_{R \rightarrow \infty} + c_2 = 0 + c_2 = 0$$

(با انتخاب مبدأ پتانسیل صفر در بی نهایت)

بدلیل آنکه تابع پتانسیل بایستی یک تابع پیوست باشد. بنابراین

$$R = b : V_1 = V_2 \Rightarrow -\frac{C_1}{b} = -\frac{\rho_0 b^3}{12\epsilon_0 b} + C'_2$$

همچنین با توجه به آنکه $\epsilon_1 = \epsilon_2$ در نتیجه:

$$(E_1 = E_2)|_{R=b} \Rightarrow -\frac{c_1}{b} = -\frac{\rho_0 b^2}{4\epsilon_0 b} \Rightarrow c_1 = -\frac{\rho_0 b^3}{4\epsilon_0}$$

$$c'_2 = -\frac{c_1}{b} + \frac{\rho_0 b^2}{12\epsilon_0} = \frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0}$$

و نهایتاً:

در نتیجه:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\rho_0 b^3}{4\epsilon_0 R} \\ \vec{E}_1 = \frac{\rho_0 b^3}{4\epsilon_0 R^2} \hat{a}_R \\ V_2 = -\frac{\rho_0 R^3}{12\epsilon_0 b} + \frac{\rho_0 b^2}{3\epsilon_0} \\ \vec{E}_2 = \frac{\rho_0 R^2}{4\epsilon_0 b} \hat{a}_R \end{cases}$$

توجه: در انتخاب معادله پواسون یا معادله لاپلاس این نکته حائز اهمیت است که تابع V مجهول ناحیه ای که در صدد یافتن (حل) آن هستیم، تعیین کننده خواهد بود یعنی اگر در آن ناحیه $\rho = 0$ باشد معادله لاپلاس و در غیر انصورت معادله پواسون مطرح خواهد شد و سایر نواحی در این انتخاب دخیل نمی باشند و تأثیرات سایر نواحی در شرایط مرزی در حل معادله دیفرانسیلی لحاظ خواهد شد.

روش تصاویر Images Method

در یک محیط که شامل یک توزیع بار مشخص در مقابل یک جسم هادی باشد می توان از این روش برای یافتن تابع پتانسیل استفاده نمود به نحوی که از طریق استقرار یک بار مجازی بنام بار تصویری بتوان جسم هادی را حذف نمود و مسئله را تبدیل به فضای خالی از جسم هادی کرد تا براحتی بتوان پتانسیل را صرفاً با در نظر گرفتن بار اصلی (حقیقی) و بار مجازی (تصویری) محاسبه نمود. در این روش جسم هادی همانند یک سیستم آینه عمل کرده و تصویر بار حقیقی بصورت یک بار تصویری در مسئله ظاهر می شود.

مثال: بار نقطه ای در مقابل صفحه هادی بینهایت، زمین شده. صفحه در موقعیت

$$\begin{matrix} 0 \\ z=0 \text{ در نقطه } +Q \\ d \end{matrix}$$



در ناحیه $z \leq 0$:

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

اما با توجه به نامحدود بودن صفحه هادی و تقارن موجود

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \Rightarrow V = c_1 z + c_2$$

بنابراین:

اما:

$$V(z=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$V(z \rightarrow \infty) \neq \infty \Rightarrow c_1 = 0$$

$$V|_{z \leq 0} = 0$$

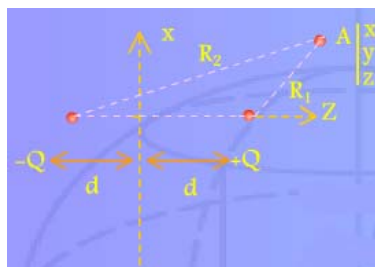
در نتیجه:

پس جواب ناحیه $z \leq 0$ مشخص است و روش تصاویر را صرفاً برای خارج از این ناحیه بکار می بریم اما در ناحیه $z > 0$:

چنانچه تصویر بار $+Q$ در صفحه هادی بینهایت بدست آوریم بار تصویری آن به میزان $q = -Q$ و در

موقعیت $\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{matrix}$ مستقر می شود.

بنابراین با استقرار $-Q$ در $z = -d$ ، جسم هادی را حذف می کنیم.



$$V(x, y, z) = |_{z > 0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{+Q}{R_1} + \frac{-Q}{R_2} \right]$$

اما

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}$$

$$V|_{z \geq 0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

یعنی:

که معادله تأیید کننده حفظ شرایط مسئله در زمان قبل از حذف هادی و استقرار بار مجازی $-Q$ می باشد چون:

$$V(z=0) = 0$$

محاسبه شدت میدان

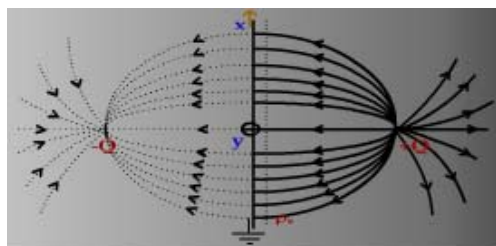
$$\vec{E}|_{z>0} = -\nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{a}_z \right]$$

برای تعیین چگالی بار سطحی القاء شده بر روی صفحه هادی

$$\rho_s = D_n|_{z=0} = \epsilon_0 E_n = \epsilon_0 E_z|_{z=0}$$

$$E = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2(z-d)}{2[x^2 + y^2 + (z-d)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{-2(z+d)}{2[x^2 + y^2 + (z+d)^2]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$E_z|_{z=0} = \frac{+2Q}{4\pi\epsilon_0 [x^2 + y^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{Qd}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$



بنابراین

$$\rho_s = -\frac{Qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$r=0 \Rightarrow \rho_s \text{ is max}$$

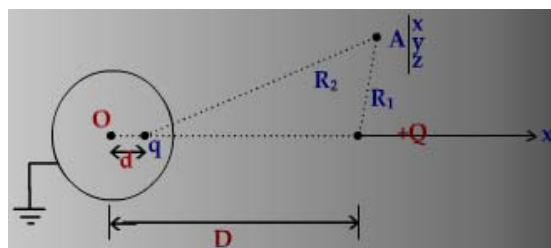
$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \rho_s \rightarrow 0$$

کل بار توزیع شده روی صفحه هادی

$$q = \int \rho_s ds$$

$$q = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{-Qd}{2\pi[r^2 + d^2]^{\frac{3}{2}}} r dr d\phi = -Q$$

مثال: بار نقطه ای در مقابل کره هادی زمین شده به شعاع a و به فاصله D از مرکز کره



موقعیت +Q در 0 مرکز کره در مبدأ مختصات قرار دارد.

برای حذف هادی باید باز تصویر q در موقعیت $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{vmatrix}$ در نظر گرفت به نحوی که

$$V(R=a)=0$$

پتانسیل در ناحیه $R \leq a$:

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{dV}{dR} \right) = 0$$

$$\Rightarrow V = -\frac{C_1}{R_1} + C_2$$

$$V(R=0)=0 \Rightarrow C_1=0$$

$$V(R=a)=0 \Rightarrow C_2=0$$

$$V|_{R \leq a} = 0$$

بنابراین:

اما برای ناحیه $R > a$:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{R_1} + \frac{q}{R_2} \right]$$

$$R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}$$

$$R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}$$

$$V = \left|_{R \geq a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}} + \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right] \right.$$

با توجه به آنکه باید $V(R=a)=0$ شود بنابراین برای یافتن دو مجهول q و d با اعمال $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ در رابطه اخیر می توان q و d بقرار زیر بدست آورد:

$$d = \frac{a^2}{D}, \quad q = -\frac{a}{D}Q$$

$$d = \frac{a^2}{D} < a$$

واضح است که

$$\frac{a}{D} < 1 \Rightarrow |q| < Q$$

یعنی q در داخل کره مستقر است و

یعنی بار تصویر از بار اصلی کوچکتر و مخالف علامت Q است.

نکته: می توان برای حل برخی از مسائل مشابه، از دیدگاه آینه ها و سیستم نوری بهره جست بعبارتی بارهای تصویری را از طریق سیستم آینه تعیین کرد و سپس هادی را حذف نمود و محیط را بدون اجسام هادی بررسی و پارامترها را بدست آورد.

مسائل مقدار مرزی Boundary value problems

در این قسمت به حل معادله لاپلاس از دیدگاه ریاضی یعنی حل معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن از طریق روش متغیر جدا (Separation variable) می پردازیم به این مفهوم که $\nabla^2 V$ که شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم هر سه متغیر در هر دستگاه مختصات است را با در نظر گرفتن آنکه تابع مجهول V معادل حاصل ضرب سه تابع تک متغیره می باشد در صدد یافتن آنها

خواهیم شد. حل مسئله فوق در فضائی است که توزیع بار تنها روی سطوح (مرزهای) محدود کننده آن فضا قرار دارد و پتانسیل در ناحیه بدون بار صدق می کند.

بعنوان مثال در دستگاه مختصات مستطیلی

$$V(x, y, z) = ?$$

$$\nabla^2 V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad , \quad X(x) = ? \quad , \quad Y(y) = ? \quad , \quad Z(z) = ?$$

با جایگزین V فوق در معادله لاپلاس

$$YZ \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

با تقسیم طرفین بر تابع XYZ که در کلیه نقاط فضای مورد نظر مخالف صفر است خواهیم داشت:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{مقدار ثابت} & = K_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \text{مقدار ثابت} & = K_y^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \text{مقدار ثابت} & = K_z^2 \end{cases}$$

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = 0$$

با شرط:

بسته به آنگه K^2 ها مثبت، منفی و یا صفر باشند جوابهای هر یک از سه معادله دیفرانسیل درجه ۲ همگن تک متغیره بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{f(\alpha)} \frac{d^2 f(\alpha)}{d\alpha^2} = k_\alpha^2 \quad (\alpha = x, y, z \quad ; \quad X, Y, Z)$$

$$\text{if } k_\alpha^2 = 0 \Rightarrow f(\alpha) = A\alpha + B$$

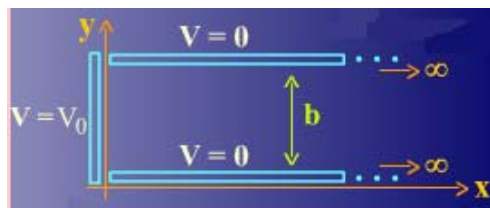
$$\text{if } k_\alpha^2 > 0 \Rightarrow f(\alpha) = Ae^{k_\alpha \alpha} + Be^{-k_\alpha \alpha} \text{ یا } A \sinh(k_\alpha \alpha) + B \cosh(k_\alpha \alpha)$$

$$\text{if } k_\alpha^2 < 0 \Rightarrow f(\alpha) = A \sin(k_\alpha \alpha) + B \cos(k_\alpha \alpha)$$

برای یافتن ضرایب ثابت از مقادیر (شرایط) مرزی هر جهت استفاده می شود بنابراین برای یک مسئله کامل سه بعدی با توجه به آنکه معادله دیفرانسیل درجه ۲ است نیازمند ۶ شرط مرزی خواهیم بود.

انتخاب هر یک از حالات فوق بستگی به ساختار مسئله باشد؛ چنانچه در پاسخ ها تکرار صفر در جهت خاصی وجود داشته باشد از توابع پریودیک استفاده می شود- چنانچه دامنه متغیر در جهتی نامحدود باشد استفاده از توابع نمائی مناسب تر خواهد بود.

مثال: شکل زیر سطح مقطع ساختاری متشکل از سه هادی (دو نیم صفحه بینهایت و موازی که در یک طرف آن هادی سوم قرار دارد) نشان می دهد (در جهت z نامحدودند) پتانسیل دو صفحه موازی صفر و پتانسیل صفحه کناری برابر V_0 است. مطلوبست توزیع پتانسیل در ناحیه محصور شده بوسیله صفحات.



$$\nabla^2 V = 0$$

چون در امتداد z سطوح هادی نامحدودند بنابراین V مستقل از Z است.

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$v(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\frac{1}{z} \frac{d^2 z}{dz^2} = 0 \quad (k_z = 0) \Rightarrow Z(z) = Az + B \Rightarrow Z = B \equiv 1$$

$$V(y=0) = V(y=b) = 0 \Rightarrow Y(y=0) = Y(y=b) = 0$$

بنابراین در جهت y تابع پتانسیل پریودیک می باشد.

$$\frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = k_y^2 < 0 \Rightarrow Y(y) = c \sin(k_y y) + D \cos(k_y y)$$

$$Y(y=0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$Y(y=b) = 0 \Rightarrow Y = c \sin(k_y b) = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \Rightarrow k_x^2 = -k_y^2$$

اما

$$k_y^2 < 0 \Rightarrow k_x^2 > 0 \Rightarrow X(x) = E \sinh\left(\frac{n\pi}{b} x\right) + F \cosh\left(\frac{n\pi}{b} x\right)$$

$$X(x) = E e^{\frac{n\pi}{b} x} + F e^{-\frac{n\pi}{b} x}$$

یا:

$$X|_{x \rightarrow \infty} = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$V(x, y, z) = B F C e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \equiv G e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

بنابراین:

بدلیل خطی بودن معادلات دیفرانسیل، ترکیب خطی تمامی جوابها به ازاء n های مختلف می

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{تواند جواب } V(x, y, z) \text{ باشد یعنی:}$$

آخرین ضریب مجهول را با اعمال آخرین شرط مرزی بدست می آید:

$$V|_{x=0} = V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^0 \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

ضرائب A_n ها از دو طریق قابل محاسبه هستند: سری فوریه و استفاده از متعامد

بودن توابع مثلثاتی یعنی:

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} y dy = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ b/2 & m = n \end{cases}$$

بنابراین طرفین آخرین معادله را اگر در $\sin \frac{m\pi}{b} y$ ضرب نموده و انتگرال گرفته شود:

$$\int_0^b V_0 \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a \sin \frac{n\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{b} y \, dy$$

طرف دوم تنها در حالت $m=n$ مقدار غیر صفر دارد.

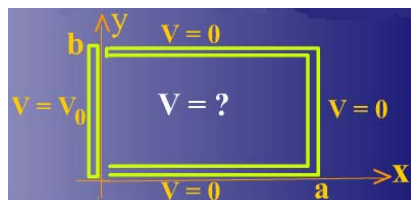
$$V_0 \left[\frac{-b}{m\pi} \cos \frac{m\pi}{b} y \right]_0^b = A_m \frac{b}{2}$$

$$A_m = \frac{2V_0}{m\pi} [1 - \cos n\pi]$$

$$A_m = \begin{cases} \frac{4V_0}{m\pi} & \text{فرد } m \\ 0 & \text{زوج } m \end{cases}$$

$$V(x, y, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{b} x} \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \quad \text{بنابراین:}$$

مثال: چنانچه سطح مقطع ساختار مثال قبل در جهت x باشد مطلوبست محاسبه تابع پتانسیل در داخل فضای محصور شده چهار هادی فوق (در جهت z نامحدود است)



$$V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$K_z = 0 \Rightarrow Z(z) = cte \equiv 1$$

$$Y(y=0) = Y(y=b) = 0 \Rightarrow Y(y) = c \sin \frac{n\pi}{b} y \quad K_y = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_x^2 + k_y^2 = 0 \Rightarrow k_x^2 > 0 \Rightarrow X(x) = E e^{k_y x} + F e^{-k_y x}$$

یا:

$$X(x) = E \sinh(k_y x) + F \cosh(k_y x)$$

$$X(x=a) = 0 \Rightarrow E \sinh(k_y a) = -F \cosh(k_y a)$$

$$F = -E \frac{\sinh(k_y a)}{\cosh(k_y a)} \Rightarrow X(x) = P \sinh[k_y (x-a)]$$

$$V(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{n\pi}{b}(x-a)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

$$V(x=0) = V_0 \Rightarrow A_n = \begin{cases} -\frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{b} a\right)} & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases}$$

در مختصات استوانه ای:

$$V(r, \phi, z) \equiv R(r)\phi(\phi)Z(z)$$

توابع تک متغیره Z, ϕ, R بسته به ساختار مسئله و تقارن های موجود در آن بصورت های زیر می توانند بدست آیند.

$$R(r): \begin{cases} r^{+n}, r^{-n} \\ \ell nr \\ BesselFunctions: J_n(k_z r), Y_n(k_z r) \end{cases}$$

$$\phi(\phi): \begin{cases} \sin n\phi, \cos n\phi \\ e^{jn\phi}, e^{-jn\phi} \end{cases}$$

$$Z(z): \begin{cases} \sin(k_z z), \cos(k_z z) & \text{اگر } k_z^2 < 0 \\ e^{k_z z}, e^{-k_z z} & \text{اگر } k_z^2 > 0 \end{cases}$$

n, k_z مربوط به معادلات دیفرانسیل درجه ۲ توابع تک متغیره بترتیب برای تابع z و تابع ϕ است.

در مختصات کروی:

$$V(R, \theta, \phi) = G(R)H(\theta)\phi(\phi)$$

حالات ممکنه:

$$G(R): \begin{cases} R^m, R^{-(m+1)} \end{cases}$$

$$H(\theta): \begin{cases} LegendreFunctions: P_m^n(\cos \theta), Q_m^n(\cos \theta) \end{cases}$$

$$\phi(\phi): \begin{cases} \sin n\phi, \cos n\phi \end{cases}$$